3 дәріс. Тақырыбы: Матрицалар. Анықтауыштар. Анықтауыштардың қасиеттері.

Матрицалар (тікшемдер). 2-ші, 3-ші ретті анықтауыштар. Анықтауыштардың қасиеттері

Анықтама. $m \times n$ *өлшемді матрица* ***деп***

$$A = \begin{Vmatrix} a_{11} \dots a_{1n} \\ \cdots\cdots\cdots \\ a_{m1} \dots a_{mn} \end{Vmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} \cdots a_{1n} \\ \cdots\cdots\cdots \\ a_{m1} \cdots a_{mn} \end{pmatrix} = \left\| a_{ij} \right\| = \left(a_{ij} \right) \qquad (1)$$

түріндегі m *– жол (жатық жол) және* n *– бағаннан (тік жолдан) тұратын* a_{ij} *– түріндегі* ***сандар кестесін*** *айтады.*

a_{ij} - сандары оның **элементтері** деп аталады. Мұндағы 1 - ші индекс осы элемент тұрған жол нөмірін, ал 2 -ші индекс баған нөмірін білдіреді. $m = n$ болса **(1) квадрат матрица** деп аталады, бұл жағдайда m (немесе n) саны оның **ретін** көрсетеді. n - ші ретті квадрат матрица n^2 элементтен тұратыны түсінікті.

Матрица - ғылыми-техникалық және экономикалық есептерде кестелік ақпараттарды жазу үшін қолданылады; бағдарламалау саласында матрицаларды екі өлшемді массивтер деп атайды.

Кейде ыңғайлы болу үшін матрицаның өлшемін индекске жазады: $A_{m \times n}$. $m \times n$ өлшемді $A_{m\times n} = (a_{ij})$ және $B_{m\times n} = (b_{ij})$ матрицаларының сәйкес элементтері тең болса ($a_{ij} = b_{ij}$), онда олар **тең матрицалар** деп аталады да $A = B$ деп белгіленеді.

Квадрат матрица үшін осы **матрицадан алынған анықтауыш матрица анықтауышы** деп аталатын $\left| a_{ij} \right|$ санын қарастыруға болады. Кейде анықтауыш $\det A$ ағыл. **детерминант (анықтауыш**) немесе Δ арқылы белгіленеді.

2 - ші ретті **матрица анықтауышы** деп

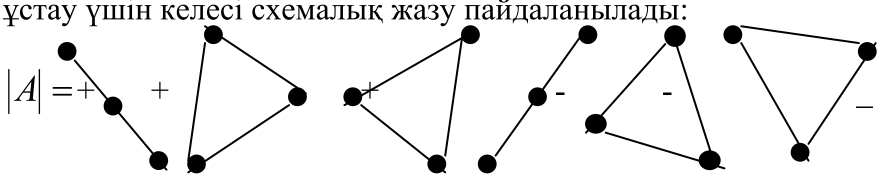
$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \qquad (2)$$

санын айтады.

3 - ші ретті матрица анықтауышы деп

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} \quad (3)$$

санын айтады. (3) анықтауышты мына үшбұрыш ережесі арқылы есептейік. Оны еске ұстау үшін келесі схемалық жазу пайдаланылады:



a_{11}, a_{22}, a_{33} (элементтері орналасқан кесінді анықтауыштың **бас диагоналі,** ал a_{13}, a_{22}, a_{31} (элементтері орналасқан кесінді оның **қосымша диагоналі** деп аталады.

Анықтама. A *матрицасының жолдарын сәйкес бағандар етіп орнын алмастырудан алынған* A^T *матрицасы* A *матрицасының* ***транспонирленген матрицасы*** *деп аталынады.*

A мен A^T матрицаларының элементтері бас диагоналға салыстырғанда симметриялы орналасқан.

Жолдарды бағандармен алмастыру амалы **транспонирлеу** деп аталады.

Δ анықтауышынан транспонирлеу арқылы алынған анықтауышты Δ^* арқылы белгілейтін боламыз.

Енді анықтауыштардың қасиеттерін қарастырайық. Түсінікті болу үшін оларды 3 -ші ретті анықтауыштар үшін тұжырымдаймыз, алайда бұл қасиеттер реті кез келген анықтауыш үшін орындалады.

Кейбір жағдайларда сөйлем ықшамырақ болу үшін "жол немесе баған" деген сөзді "**қатар"** деп атайтын боламыз.

1. Транспонирленген анықтауыштың мәні өзгермейді:

$\Delta = \Delta^*$,

$$\text{яғни} \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}$$

2. Анықтауыштың екі параллель қатарының орнын алмастырғаннан (бұл амал екі параллель қатарды **транспозициялау деп аталады**) анықтауыштың таңбасы өзгереді.

3. Параллель екі қатары бірдей (сәйкес элементтері тең) анықтауыш нөлге тең.

4. Егер қандай да бір қатардың барлық элементтері k санына көбейтілсе, анықтауыш мәні k санына көбейтіледі, басқаша айтқанда, қатардың ортақ көбейткішін анықтауыш таңбасының алдына шығаруға болады.

Салдар. Егер екі параллель қатарлардың сәйкес элементтері пропорционал болса, онда анықтауыш нольге тең.

5. Егер анықтауыштың қандай да бір қатарының барлық элементтері нөлге тең (нөл қатар) болса, онда анықтауыш мәні нольге тең.

∇ Бұл қасиет 4 - тен $k = 0$ үшін алынады.

6. Егер анықтауыштың белгілі бір қатарының әрбір элементі екі қосылғыштың қосындысы етіп берілсе, онда анықтауыш екі анықтауыштың қосындысына тең. Бірінші анықтауыштың сәйкес қатары бірінші қосылғыштардан, ал екінші анықтауыштың сәйкес қатары екінші қосылғыш-тардан тұрады да, бұл екі анықтауыштың қалған сәйкес қатарлары өзара тең элементтерден тұрады.

7. Егер анықтауыштың қандай да бір қатарының барлық элементтеріне осы қатарға параллель қатардың сәйкес элементтерін кез келген k санына көбейтіп қосса, анықтауыш мәні өзгермейді.

∇ Бұл қасиеттің дұрыстығын 6, 4 және 3 қасиеттерді қолдана отырып көз жеткізуге болады. Δ

1.2. Минорлар мен алгебралық толықтауыштар

Анықтауышты жол немесе баған элементтері бойынша жіктеу.

Анықтама. A *квадрат матрицасының* a_{ij} *(элементінің* ***миноры*** *деп* a_{ij} *элементі тұрған жол мен бағанды алып тастап* A *матрицасының қалған қатарларынан құралған матрицаны айтады.*

n-ші ретті A матрицасының a_{ij} элементінің миноры реті "$n-1$"-ге тең квадрат матрица болады. Оны MA_{ij} арқылы белгілейміз.

Минор түсінігін анықтауыштар үшін де қолданады. Анықтауыштың a_{ij} элементінің минорын M_{ij} арқылы белгілесек, онда $M_{ij}=\left|MA_{ij}\right|$.

Мысалы:

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \text{ болса, онда}$$

$$MA_{22}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{pmatrix}$$

$$M_{22}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{11}a_{33}-a_{13}a_{31}.$$

Анықтама. a_{ij} *элементінің* ***алгебралық толықтауышы*** *немесе* ***адъюнкті*** *деп*

$$A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$$

санын айтады.

8. Анықтауыштың қандай да бір қатарының элементтері мен олардың алгебралық толықтауыштарының көбейтінділерінің қосындысы осы анықтауыш шамасына тең:

$$\Delta=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}A_{ik}=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\cdots+a_{in}A_{in},\quad i=1,2,...,n, \quad (1)$$

$$\Delta=\sum_{i=1}^{n}a_{ik}A_{ik}=a_{1k}A_{1k}+a_{2k}A_{2k}+\cdots+a_{nk}A_{nk},\ k=1,2,...,n. \quad (2)$$

(1) - қосынды **анықтауыштың i - ші жол элементтері бойынша жіктелуі,** ал (2) қосынды **анықтауыштың k - ші баған элементтері бойынша жіктелуі** деп аталады.

9. Анықтауыштың қандайда бір қатар элементтерімен осы қатарға параллель басқа бір қатардың сәйкес элементтерінің алгебралық толықтауыштарының көбейтін-ділерінің қосындысы нөлге тең.